проективного пространства. "Уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина", 1965, 243, 5-28.

3. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. "Тр. Калининградского ун-та. Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. I, 1970, 27-46.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется расслояемая пара $(C_1, C_2)[I]$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ кривых второго порядка (коник), не лежащих в одной плоскости, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей и имеющих вырождающиеся в линии фокальные поверхности.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (3)$$

Поместим вершину A_i $(i,j,k = 1,2;\ i \neq j)$ репера R в одну из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ $(A_1 \neq A_2)$.

вершины A_3 и A_4 - в полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2.

Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин A_α) имеют вид:

$$(x^3)^2-(a_1x^1)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0, \tag{4}$$

$$(x^4)^2-(a_2x^2)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0. \tag{5}$$

Так как плоскости коник C_1, C_2 образуют двупараметрическое семейство, то ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^4,\omega_2^4,\omega_3^4\}$, $\{\omega_1^3,\omega_2^3,\omega_4^3\}$ должен равняться двум. Пусть

$$\omega_1^4\wedge\omega_2^4\neq 0,\quad \omega_1^3\wedge\omega_2^3\neq 0. \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega_i^4=\omega_i. \tag{7}$$

Система уравнений Пфаффа пары (C_1, C_2) запишется в виде:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \tag{8}$$

$$\theta_i\equiv da_i-a_i(\omega_i^i-\omega_{i+2}^{i+2})=A_i^k\omega_k,$$

$$\Omega_i\equiv\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}=\ell_i^k\omega_k.$$

О п р е д е л е н и е. Пара (C_1, C_2) называется парой Φ, если 1) поверхности (A_i) вырождаются в линии, касательные к которым пересекают прямую A_3A_4, 2) поверхности (A_3) и (A_4) являются невырождающимися огибающими поверхностями плоскостей коник, 3) существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)[1].

Легко показать, что если точка A_i принадлежит конике и поверхность (A_i) вырождается в линию, то поверхность (A_i) является фокальной поверхностью конгруэнции коник.

Из определения пары Φ видно, что она является расслояемой парой конгруэнций коник с вырождающимися фокальными поверхностями.

§1. Теорема существования пар Φ.

Т е о р е м а 1.1. Существуют два класса пар Φ: пары Φ_0, определяемые вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, и пары Φ_1, определяемые с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условия 1) и 2) определения пары Φ, получаем:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_3^4=0,\ \omega_4^3=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i. \tag{1.1}$$

Односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) для пар Φ характеризуются квадратичными уравнениями:

$$\omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,\ \Omega_1\wedge\omega_3^1=0, \tag{1.2}$$

$$2\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^2 + a_1 \theta_1 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad a_1 \theta_1 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \Omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + a_2 \theta_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \quad a_2 \theta_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \tag{1.2}$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$a_1 \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0, \qquad a_2 \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0.$$

Так как поверхности (A_3) и (A_4) не вырождаются, то

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0, \quad \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 \neq 0. \tag{1.3}$$

Тогда из двух последних уравнений системы (I.2) следует:

$$a_1 = a_2 = 0, \tag{1.4}$$

а из уравнений

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad \Omega_1 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad \Omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

получаем

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0. \tag{1.5}$$

Система конечных и пфаффовых уравнений пары Φ приводится к виду

$$\Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21} = 0, \quad \Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} = 0, \quad \Gamma_4^{ii} + \Gamma_3^{ii} \Gamma_j^{3j} = 0,$$

$$\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32} = 0, \quad m + \Gamma_1^{31} \Gamma_3^{12} + \Gamma_4^{12} = 0, \tag{1.6}$$

$$1 - (\Gamma_1^{31})^2 + m + 2\Gamma_1^{31} \Gamma_3^{12} = 0.$$

где

$$m = \Gamma_3^{11} \Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12} \Gamma_3^{21} \neq 0,$$

$$\Gamma_3^{12} \neq 0, \ \Gamma_4^{12} \neq 0. \tag{1.7}$$

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2} = 0,$$

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^{3i} \omega_i, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik} \omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik} \omega_k. \tag{1.8}$$

Обозначим:

$$\Gamma_1^{31} = \alpha, \ \Gamma_3^{11} = a, \ \Gamma_3^{12} = b, \ \Gamma_3^{22} = c. \tag{1.9}$$

Тогда систему (I.8), (I.6) можно записать в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_i^3 = \alpha \omega_i, \quad \omega_3^1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_3^2 = b\omega_1 + c\omega_2, \tag{1.10}$$

$$\omega_4^i = -\alpha \omega_3^i - m\omega_j,$$

причем

$$m = ac - b^2, \tag{1.11}$$

$$1 - \alpha^2 + m + 2\alpha b = 0. \tag{1.12}$$

Продолжая систему

$$\omega_i^3 = \alpha \omega_i, \quad \omega_4^i = -\alpha \omega_3^i - m\omega_j,$$

получаем

$$d\alpha = 0, \quad dm = 0. \tag{1.13}$$

Дифференцируя внешним образом конечное соотношение (1.12) и учитывая (6), находим

$$d\ell = 0. \tag{1.14}$$

Если a и c одновременно равны нулю, то получаем класс пар Φ_0, определяемый вполне интегрируемой системой.

Если a и c одновременно нулю не равны, получаем класс пар Φ_1, определяемый с произволом одной функции одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R для пар Φ_0 имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1^1 & 0 & (\ell+\varepsilon)\omega_1 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1^1 & (\ell+\varepsilon)\omega_2 & \omega_2 \\ \ell\omega_2 & \ell\omega_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon\ell\omega_2 & -\varepsilon\ell\omega_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

§2. Геометрические свойства пар Φ_0.

Т е о р е м а 2.1. Коники C_1 и C_2 пары Φ_0 пересекаются в точках A_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения (4), (5) коник C_1, C_2 в силу (1.4) имеют вид:

$$(x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{2.1}$$

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{2.2}$$

Точки A_i принадлежат одновременно коникам C_1 и C_2.

Т е о р е м а 2.2. Совокупность прямых A_3A_4 пары Φ_0 является связкой прямых с центром в точке F,

$$F = A_3 + \varepsilon A_4. \tag{2.3}$$

Все коники конгруэнций (C_1), (C_2) пары Φ_0 принадлежат конусу

$$Q \equiv 2x^1x^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0 \tag{2.4}$$

с вершиной в точке F [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство прямых A_3A_4 является двупараметрическим, все прямые этого семейства проходят через неподвижную точку F.

Коники C_1, C_2 принадлежат конусу Q. С помощью матрицы (1.15) деривационных формул репера пары Φ_0 убеждаемся, что конус (2.4) инвариантный.

Т е о р е м а 2.3. Существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) пары Φ_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^k \wedge \omega_k = 0,$$
$$\omega_3^k \wedge \omega_k^3 - \omega_4^k \wedge \omega_k = 0,$$

характеризующие одностороннее расслоение от конгруэнции (A_3A_4) к конгруэнции (A_1A_2) [2], в силу (1.15) обращаются в тождества.

Т е о р е м а 2.4. Линии (A_1) и (A_2) пары Φ_0 являются плоскими линиями. Касательные к линиям (A_i) пересекаются в точке

$$B=(b+\varepsilon)A_3+A_4. \qquad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$dA_i=\omega_i^i A_i+\omega_i B, \quad dB=b^2(\omega_2 A_1+\omega_1 A_2), \qquad (2.6)$$

то для любого $n=1,2,3\ldots$

$$(d^n A_i, A_1, A_2, B)=0, \qquad (2.7)$$

что и доказывает теорему.

Обозначим через B^* точку, гармонически сопряженную точке B относительно A_3 и A_4. Имеем:

$$B^*=(b+\varepsilon)A_3-A_4. \qquad (2.8)$$

Т е о р е м а 2.5. Поверхность (B) является плоскостью, инцидентной прямой A_1A_2. Поверхность (B^*) является невырожденной инвариантной квадрикой

$$b(b+\varepsilon)^2x^1x^2-b(3b+4\varepsilon)(x^3)^2-$$
$$-2b^2(b+\varepsilon)x^3x^4+b(b+4\varepsilon)(b+\varepsilon)^2(x^4)^2=0. \qquad (2.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как уравнение для определения асимптотических линий поверхности (B) тождественно удовлетворяется, то поверхность (B) суть плоскость. В силу (2.6) эта плоскость инцидентна прямой A_1A_2.

Точка B^* лежит на квадрике (2.9). Дифференцируя (2.9) с помощью уравнений стационарности точки:

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+\theta x^\alpha, \qquad (2.10)$$

убеждаемся, что (B^*) - инвариантная квадрика.

Т е о р е м а 2.6. Асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) соответствуют. Каждая из поверхностей (A_3) и (A_4) является невырожденной инвариантной квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии поверхностей (A_3) и (A_4) определяются одним уравнением

$$\omega_1\omega_2=0 \qquad (2.11)$$

Значит, они соответствуют. Точки A_3 и A_4 лежат соответственно на квадриках

$$2x^1x^2-2bx^3x^4+b(b+2\varepsilon)(x^4)^2=0, \qquad (2.12)$$

$$2(b+\varepsilon)^2x^1x^2-b(b+2\varepsilon)(x^3)^2+2\varepsilon b(b+\varepsilon)x^3x^4=0. \qquad (2.13)$$

Дифференцируя (2.12) и (2.13) с помощью уравнений (2.10) убеждаемся, что (A_3) и (A_4) являются инвариантными квадриками.

Т е о р е м а 2.7. Квадрики (A_3) и (B^*) пересекают плоскость $x^3=0$ по коникам, касающимся коники C_2 в точках A_1, A_2. Квадрики (A_4) и (B^*) пересекают плоскость $x^4=0$ по коникам, касающимся коники C_1 в точках A_1, A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пересечении квадрики (A_3) соответственно B^*, плоскостью $x^3=0$ получаем коники

$$2x^1x^2+b(b+2\varepsilon)(x^4)^2=0, \ x^3=0, \qquad (2.14)$$

$$8x^1x^2+b(b+4\varepsilon)(x^4)^2=0,\ x^3=0. \qquad (2.15)$$

В пересечении квадрики (A_4), соответственно (B^*), плоскостью $x^4=0$ получаем коники

$$2(b+\varepsilon)^2x^1x^2-b(b+2\varepsilon)(x^3)^2=0,\ x^4=0, \qquad (2.16)$$

$$8(b+\varepsilon)^2x^1x^2-b(3b+4\varepsilon)(x^3)^2=0,\ x^4=0. \qquad (2.17)$$

Из уравнений этих коник видно, что они касаются соответственно коник C_2 и C_1 в точках A_1 и A_2.

Литература

I. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геометрического семинара, т.3, I971.

2. С.П. Фиников, Теория пар конгруэнций, I956. ГИТТЛ, М.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4. I974

Скрыдлова Е.В.

КОНГРУЭНЦИИ $(CP)_{2,1}$

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгруэнции $(CP)_{2,1}$ - вырожденные конгруэнции [I] пар фигур, коник C и точек P, в которых многообразие коник C является двупараметрическим (конгруэнцией), а многообразие точек P — однопараметрическим (линией). Предполагается, что плоскости коник C также образуют конгруэнцию. Выделены два типа конгруэнций $(CP)_{2,1}$, для каждого из которых построен геометрически фиксированный репер. Исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(CP)_{2,1}$.

§I. Репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$.

Каждой конике C конгруэнции $(CP)_{2,1}$ соответствует единственная точка P линии (P), с другой стороны, каждой точке P ставится в соответствие однопараметрическое семейство коник C. Пусть $\mathcal{L}_P$ - характеристика семейства плоскостей этих коник.

Конгруэнции $(CP)_{2,1}$ назовем конгруэнциями типа I или II в зависимости от того, пересекает ли прямая $\mathcal{L}_P$ соответствующую ей конику C или касается её.

Построим репер конгруэнции $(CP)_{2,1}$ типа I. Выберем некоторую конику C и соответствующую ей точку P. Вершину A_4 анали-